INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modernizace studijního programu Matematika
na PřF Univerzity Palackého v Olomouci
CZ.1.07/2.2.00/28.0141

Báze vektorových prostorů, transformace souřadnic

Michal Botur

Přednáška 6

KAG/DLA1M: Lineární algebra 1

Báze vektorových prostorů

Protože vektorové prostory mají obecně nekonečně mnoho vektorů, je třeba pro jejich úplný popis nalézt jinou vhodnou metodu. Ukazuje se, že vektorové prostory konečných dimenzí jsou plně generovány konečnou množinou vektorů. Ukážeme si, že pomocí speciální množiny generátorů, kterou nazýváme báze můžeme řešit základní úlohy.

Cílem lekce je pochopit pojmy báze a souřadnicový systém, naučit se hledat transformační rovnice mezi různými souřadnicovými systémy téhož prostoru a nakonec hledat báze průniku a součtu vektorových prostorů.

V minulé lekci jsme si definovali vektorové prostory konečné dimenze jako ty, které mají konečnou generující množinu. Tedy $\mathcal{V}$ je konečné dimenze, jestliže existuje konečná množina vektorů M taková, že $[M] = \mathcal{V}$. Nyní budeme řešit otázku, kdy je množina generátorů M minimální nebo alternativně, zda-li neexistuje množina vlastní podmnožina $N \subset M$ splňující $[N] = \mathcal{V}$.

Definice 6.1 Mějme vektorový prostor $\mathcal{V} = (\mathbf{V}, \mathbf{T}, \cdot)$. Potom řekneme, že množina vektorů $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ je *lineárně nezávislá*, platí-li, že z rovnosti

$$\vec{o} = \sum_{i=1}^{n} k_i \vec{v}_i \text{ plyne } k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

pro libovolné $k_1, \ldots, k_n \in T$.

V opačném případě vektory nazveme *lineárně závislé*.

Příklad 6.1 Zjistěme, zda-li jsou vektory $(1,1,3), (1,2,3), (1,3,3)$ lineárně závislé či nezávislé. Z definice dostáváme soustavu třech lineárních rovnic o třech neznámých

$$k_1(1,1,3) + k_2(1,2,3) + k_3(1,3,3) = (0,0,0).$$

Obecné řešení této soustavy je závislé na jednom parametru a je ve tvaru $(p, -2p, -p)$. Definice nám říká, že vektory jsou lineárně nezávislé právě když existuje jediné (nulové) řešení této soustavy. Jelikož existuje nenulové řešení, např.

$$1(1,1,3) + (-2)(1,2,3) + (-1)(1,3,3) = (0,0,0),$$

jsou vektory lineárně závislé.

Věta 6.1 *Matice A a B jsou řádkově ekvivalentní tehdy a jen tehdy, generují-li jejich řádky (jako vektory) stejné vektorové prostory.*

Věta 6.2 *Nenulové řádky matice A v trojúhelníkovém tvaru jsou (jako vektory) lineárně nezávislé.*

Příklad 6.2 Chceme-li najít množinu lineárně nezávislých vektorů, které generují stejný prostor jako vektory $(1,1,3),(1,2,3),(1,3,3)$, vytvoříme z nich matici a Gaussovou eliminační metodou převedeme do trojúhelníkového tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z tvaru poslední matice plyne, že vektory $(1,1,3),(0,1,0)$ jsou lineárně nezávislé. Navíc podle věty 6.1 generují stejný prostor jako původní matice.

Následující věta může sloužit jako alternativní definice lineární nezávislosti vektorů.

Věta 6.3 *Vektory jsou lineárně závislé tehdy a jen tehdy je-li některý z nich lineární kombinací ostatních.*

Věta 6.4 *Z každé konečné množiny vektorů lze vybrat lineárně nezávislou množinu takovou, že generuje stejný prostor.*

Výběr lineárně nezávislé množiny z předchozí věty realizujeme následovně. Jsou-li vektory $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$ lineárně závislé, potom (postupem stejným jako v Příkladu 6.1) nalezneme skaláry $k_1,\dots,k_n \in T$ takové, že platí

$$\vec{o} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n$$

přičemž alespoň jeden z koeficientů je nenulový. Vybereme libovolný (jeden) nenulový koeficient (označme si jej například $K_i \neq 0$) a z množiny původních vektorů právě tento vektor $\vec{v}_i$ odebereme.

Získaná množina je o jeden prvek menší. Pokud není lineárně nezávislá postupujeme znovu stejně. Z konečnosti původní množiny plyne, že se tento algoritmus zastaví.

Poslední věta, která je pojmenována po Stenitzovi, bude mít v příští kapitole důležité důsledky a umožní nám definovat dimenzi vektorového prostoru.

Věta 6.5 *Jestliže množina vektorů $\vec{u}_1,\cdots\vec{u}_n$ generuje vektorový prostor $\mathcal{V}$ a $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m$ jsou lineárně nezávislé vektory potom $m \leq n$ a při vhodném očíslování vektorů také množin také množina vektorů $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m,\vec{u}_{m+1},\dots\vec{u}_n$ generuje prostor $\mathcal{V}$.*

Báze a dimenze vektorového prostoru

Jak vyplývá z uvedených vět, všechny „informace“ o vektorovém prostoru jsou již obsaženy v množině generátorů. Pokud je množina generátorů lineárně závislá, některé informace se v ní opakují. Následující definice je silně inspirována těmito poznatky

Definice 6.2 Řekneme, že n-tice vektorů $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathcal{V}$ jestliže platí:

i) vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ generují vektorový prostor $\mathcal{V}$,

ii) vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ jsou lineárně nezávislé.

Bázi obvykle značíme jako uspořádanou n-tici vektoru následovně $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \rangle$.

Důsledek Steinitzovy věty jsou následující tvrzení a definice

Věta 6.6 *Jsou-li* $\langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \rangle$ *a* $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \rangle$ *báze téhož vektorového prostoru, potom* $m = n$.

Tato věta umožňuje definovat dimenzi vektorového prostoru.

Definice 6.3 Je-li $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \rangle$ báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$, potom řekneme, že přirozené číslo $n \in N$ je *dimenzí* vektorového prostoru $\mathcal{V}$ (značíme $\dim \mathcal{V} = n$).

Následující věta dává do souvislosti dimenze vektorových podprostorů s dimenzemi jeho průniku a součtu.

Věta 6.7 *Jestliže* $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ *jsou vektorové podprostory prostoru* $\mathcal{V}$ *potom platí*

$$\dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) + \dim(\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2) = \dim \mathcal{U}_1 + \dim \mathcal{U}_2.$$

Příklad 6.3 Máme zadány dva vektorové prostory $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ pomocí svých bází následovně:

$$\mathcal{U} \colon \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \rangle,$$

$$\mathcal{V} \colon \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \rangle.$$

Úkolem je najít bázi průniku prostorů $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ a součtu prostorů $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

Bázi součtu prostorů $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ (tedy prostoru $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$) získáme tak, že aplikujeme postup Příkladu 6.2 na vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

Bázi průniku získáme následující úvahou. Vektor $\vec{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ tehdy a jen tehdy, jestliže existují skaláry $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n \in T$ takové, že platí

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \vec{u}_i = \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} t_i \vec{v}_i. \qquad (*)$$

Z tohoto vztahu dostáváme systém lineárních rovnic o $m + n$ neznámých (neznámé jsou právě $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n$) ve tvaru

$$s_1 \vec{u}_1 + \dots + s_1 \vec{u}_m + t_1(-\vec{v}_1) + \dots + t_n(-\vec{v}_n) = \vec{o}.$$

Řesením soustavy je vyjádření neznámých $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n$ v závislosti na parametrech $p_1, \dots, p_k$ ve tvaru. Dosazením tohoto řešení zpět do vztahu $(*)$ dostáváme parametrické vyjádření průniku.

Souřadnice vektoru v bázi, transformační rovnice

Bázi souřadnicového systému lze efektivně použit k popisu vektorového prostoru pomocí souřadnic. Pro ilustraci zůstaňme ve vektorové rovině. Potom libovolné dva vektory, které neleží na jedné přímce tvoří bázi. Souřadnicový systém může vytvořit tak, že osy vedeme ve směrech vektorů a délka vektoru bude jednotkou „délky“ na jednotlivých osách. Potom rovnoběžníkový systém (který není obecně pravoúhlý) souřadnic bude odpovídat námi zavedenému systému.

Věta 6.8 *Jestliže $\mathcal{B} = \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$ je báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Potom ke každému vektoru $\vec{v} \in \mathcal{V}$ existuje* **jediná** *n-tice skalárů $k_1, \ldots, k_n$ splňující rovnost*

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \vec{v}_i.$$

Potom řekneme, že n-tice $(k_1, \ldots, k_n)$ jsou souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{B}$ *(toto značíme $\vec{v} = [k_1, \ldots, k_n]_{\mathcal{B}}$).*

Příklad 6.4 Chceme-li zjistit souřadnice vektoru v některé bázi, postupujeme stejně jako v Příkladu 6.1. Jediným rozdílem je, že skutečnost, že vektory nám tvoří bázi, garantují jediné řešení soustavy rovnic. Toto řešení jsou hledané souřadnice.

Věta 6.9 *Jestliže $\mathcal{B} = \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$ je báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Mějme vektory určené svými souřadnicemi $[k_1, \ldots, k_n]_{\mathcal{B}}$ a $[s_1, \ldots, s_n]_{\mathcal{B}}$ a skalár $k \in T$. Potom platí*

i) $[k_1, \ldots, k_n]_{\mathcal{B}} + [s_1, \ldots, s_n]_{\mathcal{B}} = [k_1 + s_1, \ldots, k_n + s_n]_{\mathcal{B}}$,

ii) $k \cdot [k_1, \ldots, k_n]_{\mathcal{B}} = [k \cdot k_1, \ldots, k \cdot k_n]_{\mathcal{B}}$.

Protože zřejmě platí, že každé souřadnice určují vektor, hlavním důsledkem této věty je, že vektorové prostory konečné dimenze nad tělesem $\mathbf{T}$ jsou až na označení prvků identické s vektorovými prostory $\mathbf{T}^n$ (matematickou terminologií říkáme, že prostory jsou izomorfní).

V poslední části si ukážeme, že matice poskytují elegantní nástroj jak vyjádřit transformace souřadnic téhož vektoru v různých bázích.

Věta 6.10 *Jestliže máme báze $\mathcal{B} = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \rangle$ a $\mathcal{C} = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \rangle$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Jestliže platí*

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}]_{\mathcal{C}}, \\ \vec{u}_2 &= [a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}]_{\mathcal{C}}, \\ &\vdots \\ \vec{u}_n &= [a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}]_{\mathcal{C}}, \end{aligned}$$

a označíme-li matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

potom pro libovolné dva vektory skalárů $(s_1, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_n) \in T^n$ platí, že

$$[s_1, \dots, s_n]_{\mathcal{B}} = [t_1, \dots, t_n]_{\mathcal{C}}$$

tehdy a jen tehdy, platí-li

$$(s_1, \dots, s_n) \cdot A = (t_1, \dots, t_n).$$

Matice A se potom nazývá matice přechodu *od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{C}$ a značíme ji $A_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.*

Jestliže souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{B}$ značíme $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$, potom lze předchozí větu zapsat i jednodušeji

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} \cdot A_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [\vec{v}]_{\mathcal{C}}.$$

Příklad 6.5 Najděme matici přechodu mezi bázemi

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \langle (2,0), (3,1) \rangle, \\ \mathcal{C} &= \langle (1,-1), (1,1) \rangle. \end{aligned}$$

Protože platí

$$\begin{aligned} (2,0) &= 1 \cdot (1,-1) + 1 \cdot (1,1), \\ (3,1) &= 1 \cdot (1,-1) + 2 \cdot (1,1), \end{aligned}$$

platí také

$$(2,0) = [1,1]_{\mathcal{C}}, (3,1) = [1,2]_{\mathcal{C}}$$

a proto matice přechodu je ve tvaru

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Reference

[1] D. Hort, J. Rachůnek: Algebra I., [Univerzita Palackého V Olomouci, 2003].

[2] Bican L.: Lineární algebra, [SNTL Praha, 1979.].

[3] Waerden, L.: Algebra I., [Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971.].